MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE L'EMPLOYABILITE (DGESE)

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Concours CAE session 2016

Composition : **Mathématiques 1** (algèbre, analyse)

Durée : **2 Heures**

NB : La présentation, la propreté, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs. *L'usage des calculatrices scientifiques et de tout matériel électronique n'est pas autorisé*. Si au cours de l'épreuve le candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1 :

Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) - 2x$.

1) Donner le domaine de définition de h, noté $\mathcal{D}(h)$.
2) Étudier la parité de h.
3) Démontrer que h est dérivable sur $\mathcal{D}(h)$ et calculer $h'(x)$ pour tout x de $\mathcal{D}(h)$.
4) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe représentative de h en son point d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.
5) Dresser le tableau de variations de h en précisant ses limites aux bornes de son ensemble de définition.
6) Calculer h'' et étudier la convexité de h.
7) Donner le développement limité de h à l'ordre 3 au voisinage de $x_0 = 0$.
8) Tracer une courbe représentative de h ainsi que de T. (On donne $\ln 3 \simeq 1,1$).
9) Montrer que, $\forall x \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$, $0 \leqslant h'(x) \leqslant \dfrac{2}{3}$.
10) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

    a. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0; \dfrac{1}{2}\right]$.

    b. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leqslant \dfrac{2}{3}|u_n|$, puis en déduire que, $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

    c. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2 :

Soit la matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 1+\alpha & 3 \end{pmatrix}$

où α est un nombre réel.

1) Déterminer α pour que 2 soit valeur propre de M.

2) On considère désormais la matrice M dans laquelle on a remplacé α par sa valeur trouvée à la question précédente.

a. Déterminer les valeurs propres de M.

b. Déterminer les sous-espaces propres de M.

c. La matrice M est-elle diagonalisable ? Justifier votre réponse.

Exercice 3 :

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite définie par : $x_1 = 2,\ x_2 = 3 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1,\ x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$.

1) Prouver que $\forall n \geqslant 1,\ x_n \in \mathbb{Z}$.

2) Déterminer l'expression de x_n en fonction de n.

3) Prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x_n}{n!}$ est convergente et calculer sa somme.

4) Expliquer pourquoi, quelle que soit la suite numérique (x_n) récurrente linéaire d'ordre deux dont l'équation caractéristique a un discriminant positif ou nul, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x_n}{n!}$ sera convergente.

Exercice 4 :

Soit x un réel strictement positif. On pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$.

1) Montrer que l'intégrale $I(x)$ est convergente.

2) Calculer $I(x)$. $\left(\textit{Indication :}\text{ on pourra poser } u = \dfrac{x^2}{t}\right)$.

Fin de l'énoncé.